TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 10

Construcción de medidas

En esta sección $\mathbb{F}$ será un conjunto cualquiera fijo, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y μ_0 una quasi medida sobre $\mathcal{A}$. Todos los conjuntos con los que trataremos serán subconjuntos de $\mathbb{F}$.

Vamos a ver cómo, siguiendo el método de Lebesgue, se puede extender una quasi medida, definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, a la σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{A})$, generada por el álgebra. Primero definiremos la medida exterior de cualquier subconjunto de $\mathbb{F}$; después definiremos la medibilidad de un conjunto utilizando el criterio de Carathéodory. Una vez hecho esto, mostraremos que la familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra, la cual contiene a los elementos de $\mathcal{A}$ y a los conjuntos de medida exterior cero. La medida de un conjunto medible la definiremos como su medida exterior y mostraremos que la medida así definida, restringida a $\mathcal{A}$, coincide con μ_0.

DEFINICIONES

Definición 1. *Diremos que una colección finita o infinita numerable $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ es una cubierta del conjunto A si $A \subset \bigcup_n A_n$.*

Definición 2. *Se define la medida exterior, $\mu_e(A)$, de un conjunto A, mediante la relación*

$$\mu_e(A) = \text{ínf}\left\{\textstyle\sum_j \mu_0(A_j) : A_1, A_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\}$$

Definición 3. *Diremos que un conjunto E es medible si $\mu_e(A) = \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$ para cualquier conjunto A. Además, en este caso, se define la medida de E, $\mu(E)$, como la medida exterior de E.*

RESULTADOS

1. Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$.

2. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_e(A) = \mu_0(A)$.

3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos, entonces:

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(A_n)$$

4. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$\mu_e(A) \leq \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A, de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad.

5. La familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.

6. La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función finitamente aditiva.

7. La familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.

8. La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función σ-aditiva.

9. Todo conjunto de medida exterior cero es medible.

10. Todo elemento de $\mathcal{A}$ es medible.

11. Todo elemento de $\sigma(\mathcal{A})$ es medible.

12. **Teorema de extensión de Carathéodory**: Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ una quasi medida. Entonces existe una medida $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tal que $\mu(A) = \mu_0(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$, donde $\Im$ es una σ-álgebra que contiene a $\sigma(\mathcal{A})$ y a los conjuntos de medida exterior cero.

13. Dado cualquier conjunto medible E, de medida finita, existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ y un conjunto C, de medida exterior cero, tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.

14. Si μ es σ-finita, entonces, dado cualquier conjunto medible E existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ y un conjunto C, de medida exterior cero, tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.

15. Si μ es σ-finita, la σ-álgebra de los conjuntos medibles es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida exterior cero.

16. Todo conjunto de medida exterior cero está contenido en un conjunto $B \in \sigma(\mathcal{A})$ de medida exterior cero.

DEMOSTRACIONES

Proposición 1. *Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$.*

Gracias a la σ-subaditividad de μ_0 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2. *Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_e(A) = \mu_0(A)$.*

Demostración

Sea $A \in \mathcal{A}$ y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces $A_n \cap A \in \mathcal{A}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_n (A_n \cap A)$; así que, como μ_0 es σ-subaditiva:

$$\mu_0(A) \leq \sum_n \mu_0(A_n \cap A) \leq \sum_n \mu_0(A_n)$$

Por lo tanto, como esto ocurre para cualquier cubierta de A, $\mu_0(A) \leq \mu_e(A)$.

Por otra parte, como A es una cubierta de él mismo, se tiene $\mu_e(A) \leq \mu_0(A)$.

$\blacksquare$

Proposición 3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos, entonces:*

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(A_n)$$

Demostración

Si $\mu_e(A_n) = \infty$ para alguna n el resultado es trivial.

Supongamos entonces que $\mu_e(A_n) < \infty$ para toda n. Dada $\varepsilon > 0$, para cada conjunto A_n sea $A_{n1}, A_{n2}, \ldots$ una cubierta de A_n tal que $\sum_m \mu_0(A_{nm}) < \mu_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. La familia de conjuntos A_{nm} forman una cubierta de $\bigcup_n A_n$, así que:

$$\mu_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \sum_m \mu_0(A_{nm}) \leq \sum_n \left[\mu_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] \leq \sum_n \mu_e(A_n) + \varepsilon;$$

es decir, $\mu_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu_e(A_n) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto:

$$\mu_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu_e(A_n)$$

$\blacksquare$

Definición 4. *Diremos que un conjunto E es medible si $\mu_e(A) = \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$ para cualquier conjunto A. Además, en este caso, se define la medida de E, $\mu(E)$, como la medida exterior de E.*

Obsérvese que, por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$\mu_e(A) \leq \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A, de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad.

Proposición 4. *La familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.*

Demostración

Que el conjunto $\mathbb{F}$ es medible, así como que el complemento de un conjunto medible es medible, son resultados obvios.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles y A cualquier conjunto. Se tiene entonces:

$\mu_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + \mu_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)$

$= \mu_e\left((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right) + \mu_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$\leq \mu_e(A \cap E_1) + \mu_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$= \mu_e(A \cap E_1) + \mu_e(A \cap E_1^c) = \mu_e(A).$

Así que, $E_1 \cup E_2$ es medible.

■

Proposición 5. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función finitamente aditiva.*

Demostración

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles ajenos, entonces, como $E_1 \cup E_2$ es medible, se tiene:

$\mu\left(E_1 \cup E_2)\right) = \mu\left((E_1 \cup E_2)) \cap E_1\right) + \mu\left((E_1 \cup E_2) \cap E_1^c\right)$

$= \mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_2\right)$

■

Proposición 6. *La familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas y A cualquier subconjunto de $\mathbb{F}$.

Demostremos que $\mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ la igualdad es obvia.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $n = k$, entonces, como E_{k+1} es medible, se tiene:

$\mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j)\right) = \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}^c\right)$

$= \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)\right) = \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} \mu_e(A \cap E_j)$

$= \sum_{j=1}^{k+1} \mu_e(A \cap E_j)$

Por lo tanto, la igualdad es válida para $n = k + 1$, así que, por el principio de inducción, lo es para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como la familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ es medible, así que:

$\mu_e(A) = \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$

$\geq \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$ y utilizando la σ-subaditividad de la medida exterior,se obtiene entonces:

$\mu_e(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

$\geq \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

■

Proposición 7. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función σ-aditiva.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$. Por otra parte, por la aditividad finita de la función que asigna a cada conjunto medible su medida, se tiene, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$$

Así que tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$, se Aiene:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

■

Si denotamos por $\mathcal{M}$ a la familia de los conjuntos medibles, sabemos ya que $\mathcal{M}$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Además, la función $\mu : \mathcal{M} \mapsto \overline{R}$ es no negativa, σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$. Así que μ es un a medida definida sobre una σ-álgegra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Lo que resta probar es que μ es una extensión de μ_0. Vamos a demostrar que efectivamente esto es así y veremos que $\mathcal{M}$ es más grande que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Esto es análogo a lo que ocurre con la medida de Lebesgue, la cual está definida no únicamente sobre los subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, sino también sobre todos los conjuntos de medida cero.

Proposición 8. *Todo conjunto de medida exterior cero es medible.*

Demostración

Sea E un conjunto de medida exterior cero y A cualquier conjunto, entonces $A \cap E$ tiene medida exterior cero, así que:

$$\mu_e(A) \geq \mu_e(A \cap E^c) = \mu_e(A \cap E^c) + \mu_e(A \cap E)$$

■

Proposición 9. *Todo elemento de $\mathcal{A}$ es medible.*

Demostración

Sea $E \in \mathcal{A}$, A cualquier conjunto y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces, para cada A_n, los conjuntos $A_n \cap E$ y $A_n \cap E^c$ pertenecen a $\mathcal{A}$ y se tiene:

$\mu_e(A \cap E) \leq \mu_e\left((\bigcup_n A_n) \cap E\right) = \mu_e\left(\bigcup_n (A_n \cap E)\right)$

$\leq \sum_n \mu_e(A_n \cap E) = \sum_n \mu_0(A_n \cap E)$,

$\mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e\left((\bigcup_n A_n) \cap E^c\right) = \mu_e\left(\bigcup_n (A_n \cap E^c)\right)$

$\leq \sum_n \mu_e(A_n \cap E^c) = \sum_n \mu_0(A_n \cap E^c)$

Así que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \sum_n \mu_0(A_n \cap E) + \sum_n \mu_0(A_n \cap E^c) = \sum_n \mu_0(A_n)$$

Finalmente, como lo anterior es válido para cualquier cubierta de A, se puede concluir que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e(A)$$

Proposición 10. *Todo elemento de $\sigma(\mathcal{A})$ es medible.*

Demostración

El resultado es inmediato pues la familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra que contiene a los elementos de $\mathcal{A}$.

■

Los resultados anteriores pueden condensarse en el siguiente:

Teorema 1 (Teorema de extensión de Carathéodory)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ una quasi medida. Entonces existe una medida $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tal que $\mu(A) = \mu_0(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$, donde $\Im$ es una σ-álgebra que contiene a $\sigma(\mathcal{A})$ y a los conjuntos de medida exterior cero.*

Definición 5. *Si $\mathbb{F}$ es un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una quasi medida, a la medida $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ del teorema anterior la llamaremos la medida generada por la quasi medida μ_0.*

Ahora veremos que la familia de conjuntos medibles $\Im$, si bien es más grande que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, en general no es más grande que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los subconjuntos de $\mathbb{F}$ que tienen medida exterior cero.

Obsérvese que si un conjunto $B \subset \mathbb{F}$ tiene medida exterior cero, entonces, dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección infinita numerable, $A_1, A_2 \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) < \varepsilon$.

Proposición 11. *Dado cualquier conjunto medible E, de medida finita, existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ y un conjunto C, de medida exterior cero, tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.*

Demostración

Sea E un conjunto medible de medida finita y, dada $\varepsilon > 0$, sea $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de E tal que:

$$\textstyle\sum_j \mu(A_j) < \mu(E) + \varepsilon$$

$A_\varepsilon = \bigcup_j A_j$ es entonces un elemento $\sigma(\mathcal{A})$ tal que:

$$\mu(A_\varepsilon - E) = \mu(A_\varepsilon) - \mu(E) \leq \sum_j \mu(A_j) - \mu(E) < \varepsilon$$

Es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $A_\varepsilon \supset E$ y $\mu(A_\varepsilon - E) < \varepsilon$.

Sea entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de elementos de $\sigma(\mathcal{A})$, que contengan a E, tales que $\mu(A_n - E) < \frac{1}{n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j - E\right) \leq \mu(A_n - E) < \frac{1}{n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j - E\right) = 0$.

Por lo tanto, existe $A \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $A \supset E$ y $\mu(A - E) = 0$.

Sea entonces $D \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $D \supset E^c$ y $\mu(D - E^c) = 0$. Entonces $B = D^c$ es un elemento de $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $B \subset E$ y $\mu(E - B) = \mu(E - B^c) = \mu(E \cap B) = \mu(B - E^c) = 0$, de manera que $B \in \sigma(\mathcal{A})$, $F = E - B$ es un conjunto de medida exterior cero y se tiene $E = B \cup F$.

Finalmente, definamos $C = F - B$, entonces C tiene medida exterior cero y se tiene $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.

■

Corolario 1. *Si μ es σ-finita, entonces, dado cualquier conjunto medible E existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ y un conjunto C, de medida exterior cero, tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.*

Demostración

Sea $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ y $\mu(F_k) < \infty$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $E_k = E \cap F_k$.

Sea $B_k \in \sigma(\mathcal{A})$ y C_k un conjunto de medida exterior cero tales que $E_k = B_k \cup C_k$ y $B_k \cap C_k = \emptyset$, entonces tomando $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ y $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, se tiene que $B \in \sigma(\mathcal{A})$, D tiene medida exterior cero y $E = B \cup D$.

Finalmente, definamos $C = D - B$, entonces C tiene medida exterior cero y se tiene $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.

■

Corolario 2. *Si μ es σ-finita, la σ-álgebra de los conjuntos medibles es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida exterior cero.*

Proposición 12. *Todo conjunto de medida exterior cero está contenido en un conjunto $B \in \sigma(\mathcal{A})$ de medida exterior cero.*

Demostración

Sea A un conjunto de medida exterior cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\{A_k^n\}$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k^n) < \frac{1}{n}$. Definamos $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n$ y $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces, $B \in \sigma(\mathcal{A})$, tiene medida exterior cero y $A \subset B$.

Definición 6. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y μ una medida sobre $\Im$. Diremos que $\Im$ es completa con respecto a μ si contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos de medida μ igual a cero.*

Si una σ-álgebra $\Im_0$ no es completa con respecto a una medida μ, se puede completar. En efecto, sea H la familia de conjuntos $B \in \Im_0$ tales que $\mu(B) = 0$, entonces la familia $\Im$ de conjuntos de la forma $A \cup E$, donde $A \in \Im_0$ y E es un subconjunto de un conjunto $B \in H$, forma una σ-álgebra de subconjuntos de F.

La prueba de que $\mathbb{F} \in \Im$ y que $\Im$ es cerrada bajo uniones numerables es inmediata. Para probar que $\Im$ es cerrada bajo complementos, sea $C = A \cup E \in \Im$, donde $A \in \Im_0$ y E es un subconjunto de un conjunto $B \in H$. Entonces:

$C^c = (A \cup E)^c = A^c \cap E^c = A^c \cap [E^c \cap (B \cup B^c)]$

$= A^c \cap [(E^c \cap B) \cup B^c] = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E^c \cap B)$

Así que $C^c \in \Im$.

Obsérvese que $\Im$ es la σ-álgebra generada por $\Im_0$ y los subconjuntos de conjuntos $B \in \Im_0$ de medida cero.

Extendamos μ a $\Im$ definiendo $\mu(A \cup E) = \mu(A)$ para cualesquiera $A \in \Im_0$ y E un subconjunto de un conjunto $B \in H$.

Sea $C \in \Im$ tal que $\mu(C) = 0$, entonces $C = A \cup E$, en donde $A \in \Im_0$ y $E \subset B$, con $B \in H$. Así que:

Como $\mu(A) = \mu(A \cup E) = \mu(C) = 0$, entonces $A \in H$.

Sea ahora $D \subset C$, entonces $D \subset A \cup B$, así que $D \in \Im$. Es decir, $\Im$ es completa con respecto a μ.

Lo anterior también muestra que si $C \in \Im$ y $\mu(C) = 0$, entonces $C \subset A \cup B$, con $A, B \in H$. Por lo tanto, todo conjunto $C \in \Im$ de medida cero está contenido en un conjunto $G \in \Im_0$ de medida cero.

Retomando el enunciado del teorema 1, la medida μ restringida a $\sigma(\mathcal{A})$ sigue siendo una medida. La proposición 12 muestra entonces que si completamos $\sigma(\mathcal{A})$ con respecto a μ, obtenemos la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida exterior cero, es decir, recuperamos la medida μ definida sobre $\Im$.

Medidas sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ y funciones no decrecientes

Sea $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función no decreciente y continua por la derecha y definamos:

$F(\infty) = \lim_{x \rightsquigarrow \infty} F(x)$

$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$

Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $a < b$, definamos $(a, b|$ de la siguiente manera:

$$(a, b| = \begin{cases} (a, b] & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ (a, b) & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Sea $\mathcal{I}$ la familia de los intervalos de este tipo, agregando al vacío como parte de la familia.

Definamos $\nu_F(\emptyset) = 0$ y, para cada intervalo $I = (a, b| \in \mathcal{I}$, $\nu_F(I) = F(b) - F(a)$.

Se podría tener $F(\infty) = \infty$ y $F(-\infty) = -\infty$, lo cual no sería problema para la definición de $\nu_F((-\infty, \infty))$ pues, con las convenciones que hemos hecho, se tendría $\mu_F((-\infty, \infty)) = \infty - (-\infty) = \infty + \infty = \infty$.

Vamos a mostrar que ν_F se puede extender para obtener una medida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. El resultado central que se requiere demostrar para hacer esto es el siguiente:

Sea $(a, b| \in \mathcal{I}$ y $(a_1, b_1|, (a_2, b_2|, \ldots$ una colección infinita de intervalos en $\mathcal{I}$ tales que $(a, b| \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k|$. Entonces:

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

Lema 1. *Sea $I = (a, b| \in \mathcal{I}$ y $\left(a^{(1)}, b^{(1)}\right|, \left(a^{(2)}, b^{(2)}\right|, \ldots, \left(a^{(m)}, b^{(m)}\right|$, una colección finita de intervalos en $\mathcal{I}$, ajenos por parejas, tal que $I = \bigcup_{j=1}^{m} \left(a^{(j)}, b^{(j)}\right|$, entonces:*

$$\nu_F(I) = \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(\left(a^{(j)}, b^{(j)}\right|\right)$$

Demostración

Como los intervalos $\left(a^{(1)}, b^{(1)}\right|, \left(a^{(2)}, b^{(2)}\right|, \ldots, \left(a^{(m)}, b^{(m)}\right|$ son ajenos por parejas y su unión es $(a, b|$, podemos ordenarlos para obtener una colección de intervalos ajenos por parejas, $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right|, \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right|, \ldots, \left(x^{(m)}, y^{(m)}\right|$, de tal forma que:

$$a = x^{(1)} < y^{(1)} = x^{(2)} < y^{(2)} = x^{(2)} < \cdots = x^{(m)} < y^{(m)} = b$$

Así que:

$\sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(\left(a^{(j)}, b^{(j)}\right|\right) = \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(\left(y^{(j)}, z^{(j)}\right|\right) = \sum_{j=1}^{m} \left[F\left(y^{(j)}\right) - F\left(x^{(j)}\right)\right]$

$= F(b) - F(a) = \mu_F(I)$

■

Lema 2. *Sea* $I = (a, b| \in \mathcal{I}$ *y* $I^{(1)} = \left(a^{(1)}, b^{(1)}\right|, \ldots, I^{(m)} = \left(a^{(m)}, b^{(m)}\right|$ *una colección finita de intervalos en* $\mathcal{I}$ *tales que* $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$*, entonces:*

$$\nu_F(I) \leq \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(I^{(j)}\right)$$

Demostración

Los puntos $a, b, a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(m)}, b^{(m)}$ constituyen una partición de un intervalo $(c, d|$ que contiene al intervalo $(a, b|$.

Esta partición parte cada intervalo $I^{(j)}$, con $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, en subintervalos ajenos por parejas, $I_1^{(j)}, \ldots, I_{n_j}^{(j)}$. Así que:

$$\nu_F\left(I^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{n_j} \nu_F\left(I_k^{(j)}\right)$$

La partición definida antes también parte el intervalo I en subintervalos ajenos por parejas, $I_1, \ldots, I_n$. Así que:

$$\nu_F(I) = \sum_{k=1}^{n} \nu_F(I_k)$$

Por otra parte, como $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, cada intervalo I_k, con $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, coincide con un intervalo $I_{k'}^{(j)}$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y alguna $k' \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$, por lo tanto:

$$\nu_F(I) = \sum_{k=1}^{n} \nu_F(I_k) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \nu_F\left(I_k^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(I^{(j)}\right)$$

■

Lema 3. *Sean* $I_1, \ldots, I_k$ *y* $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ *dos colecciones finitas de intervalos en* $\mathcal{I}$ *tales que* $I_1, \ldots, I_k$ *son ajenos por parejas,* $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ *son ajenos por parejas y* $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$*, entonces:*

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_F(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(I^{(j)}\right)$$

Demostración

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$, definamos $I_i^{(j)} = I_i \cap I^{(j)}$. Entonces, como $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, se tiene $I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I_i^{(j)}$ y $I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{k} I_i^{(j)}$, así que:

$\nu_F\left(I_i\right)=\sum_{j=1}^{m}\nu_F\left(I_i^{(j)}\right)$

$\nu_F\left(I^{(j)}\right)=\sum_{i=1}^{k}\nu_F\left(I_i^{(j)}\right)$

Por lo tanto:

$\sum_{i=1}^{k}\nu_F\left(I_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\nu_F\left(I_i^{(j)}\right)$

$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\nu_F\left(I_i^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\nu_F\left(I^{(j)}\right)$

■

Teorema 2. *Sea $(a,b|\in\mathcal{I}$ y $(a_1,b_1|,(a_2,b_2|,\ldots$ una colección infinita de intervalos en $\mathcal{I}$ tales que $(a,b|\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k|$. Entonces:*

$$F(b)-F(a)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[F(b_k)-F(a_k)\right]$$

Demostración

Tomemos $\varepsilon>0$ y $\delta>0$, arbitrarios.

Como F es continua por la derecha, para cada cada $k\in\mathbb{N}$, existe $\delta_k>0$ tal que:

$$F\left(d_k\right)-F\left(b_k\right)<\tfrac{\varepsilon}{2^k},$$

donde:

$$d_k=\begin{cases} b_k+\delta_k & \text{si } b_k\in\mathbb{R}\\ b_k & \text{si } b_k=\infty\end{cases}$$

Definamos:

$$c_\delta=\begin{cases} a+\delta & \text{si } a\in\mathbb{R}\\ -\frac{1}{\delta} & \text{si } a=-\infty\end{cases}$$

$$d_\delta=\begin{cases} b & \text{si } b\in\mathbb{R}\\ \frac{1}{\delta} & \text{si } b=\infty\end{cases}$$

Entonces:

$$\lim_{\delta\to 0}\left[F\left(d_\delta\right)-F\left(c_\delta\right)\right]=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

Además:

$$(c_\delta,d_\delta|\subset[c_\delta,d_\delta]\subset(a,b|\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k|\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,d_k)$$

Así que, por el teorema de Heine-Borel, existe una colección finita, $(a_{k_1}, d_{k_1}), \ldots, (a_{k_m}, d_{k_m})$, tal que:

$$[c_\delta, d_\delta] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right)$$

Por lo tanto:

$$(c_\delta, d_\delta] \subset [c_\delta, d_\delta] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right]$$

Así que:

$F(d_\delta) - F(c_\delta) \leq \sum_{j=1}^{m} \left[F\left(d_{k_j}\right) - F\left(a_{k_j}\right)\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F(d_k) - F(a_k)\right]$

$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F(b_k) - F(a_k)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[F(b_k) - F(a_k)\right] + \varepsilon$

Y, como $\varepsilon > 0$ es arbitraria:

$$F(d_\delta) - F(c_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F(b_k) - F(a_k)\right]$$

Finalmente, tomando límites cuando $\delta \to 0$, se obtiene:

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F(b_k) - F(a_k)\right]$$

■

Teorema 3. *Si $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función no decreciente y continua por la derecha, existe una única medida μ_F, definida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que:*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a),$$

para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Además, $\mu_F(\{x\}) = F(x) - F(x-)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Sea $\mathcal{A}$ la familia formada por los conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos en $\mathcal{I}$, ajenos por parejas.

Para cada $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{A}$, definamos $\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu_F(I_j)$.

Por los lemas anteriores, μ_F está bien definida.

Obviamente $\nu_F(I) = \mu_F(I)$ para cualquier $I \in \mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y la función $\mu_F : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ es no negativa y finitamente aditiva.

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, no vacíos y tales que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, A_i es una unión finita de intervalos en $\mathcal{I}$ ajenos por parejas. Además, como $A \in \mathcal{A}$, A también es una unión finita de intervalos en $\mathcal{I}$ ajenos por parejas.

Sean $A = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}$. Entonces:

$$\bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)} = A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}$$

Tenemos dos colecciones de intervalos, por un lado la familia $\left\{I_{(i,k)} : i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$ y por el otro la familia $\left\{I^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}\right\}$. Tanto los intervalos de la primera familia como los de la segunda son ajenos por parejas y A es igual tanto a la unión de los intervalos de la primera familia como de la segunda. Por otra parte, una pareja de intervalos, uno de la primera familia y otro de la segunda, podrían no ser ajenos.

La idea ahora es partir cada intervalo $I^{(j)}$ en intervalos ajenos por parejas, utilizando los intervalos $I_{(i,k)}$. Para esto, definamos, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$:

$$I_{(i,k)}^{(j)} = I_{(i,k)} \cap I^{(j)}$$

Entonces, los intervalos de la familia $\left\{I_{(i,k)}^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}, i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$ son ajenos por parejas y:

$I_{(i,k)} = \bigcup_{j=1}^{m} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualesquiera $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$.

$I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Además, por el teorema 2, se tiene:

$\mu_F\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_F\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Así que:

$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_F\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_F\left(I_{(i,k)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$

Además, como μ_F es finitamente aditiva y $A \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu_F(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_F(A_i)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\mu_F(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

Por lo tanto, $\mu_F(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$, así que μ_F es σ-aditiva y entonces puede ser extendida a una medida μ_F definida sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, es decir, los borelianos de $\mathbb{R}$.

Si μ_1 y μ_2 son dos medidas sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ tales que $\mu_1((a,b]) = \mu_2((a,b]) = F(b) - F(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = (-n, n]$; entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R}$ y $\mu_1(F_n) = \mu_2(F_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Así que, por el teorema de clases monótonas para π-sistemas, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para cualquier conjunto boreliano de $\mathbb{R}$.

Para la última parte, sea $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{n}, x\right]$$

Así que:

$$\mu_F(\{x\}) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \mu_F\left(\left(x - \tfrac{1}{n}, x\right]\right) = F(x) - \lim_{n \rightsquigarrow \infty} F\left(x - \tfrac{1}{n}\right) = F(x) - F(x-)$$

■

Corolario 3. *Si $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función no decreciente y continua por la izquierda, existe una única medida μ_F, definida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que:*

$$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a),$$

para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Además, $\mu_F(\{x\}) = F(x+) - F(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Definamos $F^d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F^d(x) = F(x+)$$

Entonces, F^d es no decreciente y continua por la derecha; además, $F^d(x) - F^d(x-) = F(x+) - F(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, lo cual implica que, si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces:

$F^d(b-) - F^d(a-) = F(a+) - F(a) - F^d(a) - F(b+) + F(b) + F^d(b)$

$= F(a+) - F(a) - F(a+) - F(b+) + F(b) + F(b+)$

$= F(b) - F(a)$

Sea μ_F, la una única medida, definida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que:

$$\mu_F((a,b]) = F^d(b) - F^d(a),$$

para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente que converja a a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente, de números reales mayores que a, que converja a b; entonces:

$\mu_F([a,b)) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}\, \mu_F((a_n, b_n]) = \text{lím}_{n\to\infty} F^d(b_n) - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} F^d(a_n)$

$= F^d(b-) - F^d(a-) = F(b) - F(a)$

Si μ_1 y μ_2 son dos medidas sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ tales que $\mu_1([a,b)) = \mu_2([a,b)) = F(b) - F(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = [-n, n)$; entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R}$ y $\mu_1(F_n) = \mu_2(F_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Así que, por el teorema de clases monótonas para π-sistemas, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para cualquier conjunto boreliano de $\mathbb{R}$.

Para la última parte, sea $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right)$$

Así que:

$$\mu_F(\{x\}) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}\, \mu_F\left(\left[x, x + \tfrac{1}{n}\right)\right) = \text{lím}_{n\to\infty} F\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - F(x) = F(x+) - F(x)$$

■

Ahora mostraremos que cualquier medida sobre los borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, se puede generar a partir de una función no decreciente ya sea continua por la derecha o continua por la izquierda.

Teorema 4. *Dada cualquier medida μ sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, existe una función no decreciente y continua por la derecha $F_\mu^d : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\mu((a,b]) = F_\mu^d(b) - F_\mu^d(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$. Además, si F_1 y F_2 son dos funciones con esta propiedad, entonces $F_1 - F_2$ es constante.*

Demostración

Definamos la función $F_\mu^d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F_\mu^d(x) = \begin{cases} -\mu((x,0]) & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu((0,x]) & \text{si } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

F_μ^d es no decreciente y continua por la derecha y se tiene $\mu((a,b]) = F_\mu^d(b) - F_\mu^d(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Si $F_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $F_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son dos funciones que satisfacen el enunciado del teorema, se tiene $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ para cualquier pareja de números reales a y b tales que $a < b$, lo cual implica que $(F_1 - F_2)(b) = (F_1 - F_2)(a)$; es decir, $F_1 - F_2$ es constante.

■

Corolario 4. *Para cualquier medida μ sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, existe una función no decreciente y continua por la izquierda $F_\mu^i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\mu([a,b)) = F_\mu^i(b) - F_\mu^i(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$. Además, si F_1 y F_2 son dos funciones con esta propiedad, entonces $F_1 - F_2$ es constante.*

Demostración

Sea F_μ^d una función no decreciente y continua por la derecha $F_\mu^d : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\mu((a,b]) = F_\mu^d(b) - F_\mu^d(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Definamos $F_\mu^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F_\mu^i(x) = F_\mu^d(x-)$$

Entonces, F_μ^i es no decreciente y continua por la izquierda.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente que converja a a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente, de números reales mayores que a, que converja a b; entonces:

$\mu([a,b)) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu((a_n, b_n]) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} F_\mu^d(b_n) - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} F_\mu^d(b_n)$

$= F_\mu^d(b-) - F_\mu^d(a-) = F_\mu^i(b) - F_\mu^i(a)$

Si $F_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $F_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son dos funciones que satisfacen el enunciado del teorema, se tiene $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ para cualquier pareja de números reales a y b tales que $a < b$, lo cual implica que $(F_1 - F_2)(b) = (F_1 - F_2)(a)$; es decir, $F_1 - F_2$ es constante.

■

Corolario 5. *Si μ es una medida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ es a lo más infinito numerable.*

Se tiene el siguiente resultado que es más general:

Proposición 13. *Si μ es una medida σ-finita sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ es a lo más infinito numerable.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$ y $\mu(E_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Para cada pareja $n, m \in \mathbb{N}$, definamos:

$$E_n^{(m)} = \left\{x \in E_n : \mu(\{x\}) > \tfrac{1}{m}\right\}$$

Como $\mu(E_n) < \infty$, $E_n^{(m)}$ es un conjunto finito para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Además:

$$\{x \in E_n : \mu(\{x\}) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_n^{(m)}$$

Así que el conjunto $\{x \in E_n : \mu(\{x\}) > 0\}$ es a lo más infinito numerable.

Finalmente:

$$\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E_n : \mu(\{x\}) > 0\}$$

Así que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ es a lo más infinito numerable.

$\blacksquare$

Medidas y funciones no decrecientes que crecen únicamente mediante saltos

Lema 4. *Sea* $\mathbb{F} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *un conjunto infinito numerable y* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales no negativos. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, definamos* $m(x_n) = z_n$ *y, para cualquier subconjunto* A *de* $\mathbb{F}$*, definamos:*

$$\mu(A) = \sum_{\{x\in A\}} m(x)$$

Entonces μ es una función no negativa y σ-aditiva, con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, definida sobre la σ-álgebra formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{F}$.

Demostración

Obviamente μ es no negativa y $\mu(\emptyset) = 0$.

Agreguemos a $\mathbb{F}$ un elemento arbitrario, el cual denotaremos por x_0, y definamos $m(x_0) = 0$.

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de subconjuntos de $\mathbb{F}$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Denotemos por $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots$ a los elementos de la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, denotemos por $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots$ a los elementos de A_i. Si A es vacío o un conjunto finito y r es el número de sus elementos, definamos $x_{s_k} = x_0$ para cualquier $k \in \{r+1, r+2, \ldots\}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, si A_i es vacío o un conjunto finito y r_i es el número de sus elementos, definamos $x_{i,j} = x_0$ para cualquier $j \in \{r_i+1, r_i+2, \ldots\}$.

Para cada terna $i, j, k \in \mathbb{N}$, definamos:

$m_{ij} = m(x_{i,j})$

$m_k = m(x_{s_k})$

Entonces:

$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}$

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k$

Por otra parte, la sucesión $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ contiene a todos los elementos m_{ij} tales que $x_{i,j} \in A_i$; así que, para cualquier pareja $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k$$

Así que:

$$\sum_{1=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Además, la sucesión doble $(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ contiene a todos los elementos m_k tales que $x_{s_k} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; en consecuencia, dado $N \in \mathbb{N}$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \right)$$

Así que:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} \right) = \sum_{1=1}^{\infty} \mu (A_i)$$

Por lo tanto:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq \sum_{1=1}^{\infty} \mu (A_i)$$

Podemos concluir entonces que:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{1=1}^{\infty} \mu (A_i)$$

Esta relación incluye la propiedad de la aditividad finita ya que, si $A_1, \ldots, A_n$ es una colección finita de subconjuntos de $\mathbb{F}$, ajenos por parejas, podemos definir $A_k = \emptyset$ para cualquier $k \in \{n+1, n+2, \ldots\}$. Entonces, $\mu (A_k) = 0$ para cualquier $k \in \{n+1, n+2, \ldots\}$, así que:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{1=1}^{\infty} \mu (A_i) = \sum_{1=1}^{n} \mu (A_i)$$

∎

Corolario 6. *Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ un conjunto infinito numerable de números reales y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, definamos:*

$$\mu (A) = \sum_{\{j\in\mathbb{N}: x_j \in A\}} z_j$$

Entonces μ es una función no negativa y σ-aditiva, con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, definida sobre la σ-álgebra formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Como vimos antes, toda función no decreciente se puede expresar como la suma de dos funciones no decrecientes, una que crece únicamente mediante saltos y la otra continua. Por otra parte, una medida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, podemos generarla ya sea mediante una función no decreciente y continua por la derecha, o bien mediante una no decreciente y continua por la izquierda. Se hizo costumbre elegir la función continua por la derecha para representar a la medida, pero bien podría elegirse la que es continua por la izquierda.

Tomemos una función $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, no decreciente y continua por la derecha. F se puede expresar entonces como la suma de una función F^c, continua, y una función F^d, no decreciente, continua por la derecha, que crece únicamente mediante saltos y tal que $F^d(x) - F^d(x-) = F(x) - F(x-)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Además, tenemos la definición explícita de la función F^d:

$$F^d(x) = \begin{cases} F(0-) - \sum_{\{y\in D: x<y<0\}} [F(y) - F(y-)] & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ F(0) + \sum_{\{y\in D: 0<y\leq x\}} [F(y) - F(y-)] & \text{si } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Donde D es el conjunto de puntos donde F es discontinua, el cual es a lo más infinito numerable y lo supondremos no vacío.

Si F^c es constante, la medida que genera es nula sobre los borelianos. En este caso, la medida generada por F es la generada por F^d. Si denotamos por μ_{F^d} a la medida generada por F^d, recordemos que se tienen las siguientes relaciones:

$F^d(z) - F^d(x) = \sum_{\{y\in D: x<y\leq z\}} \left[F^d(y) - F^d(y-)\right]$ para cualquier parera (x, z) de números reales tales que $x < z$.

$\mu_{F^d}((a, b]) = F^d(b) - F^d(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

$\mu_{F^d}(\{x\}) = F^d(x) - F^d(x-)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$; en particular, $\mu_{F^d}(\{x\}) = 0$ si $x \notin D$.

Así que, si $a < b$:

$\mu_{F^d}((a, b]) = F^d(b) - F^d(a) = \sum_{\{y\in D: a<y\leq b\}} \left[F^d(y) - F^d(y-)\right] = \sum_{\{y\in D: a<y\leq b\}} \mu_{F^d}(\{y\}) = \sum_{y\in(a,b]} \mu_{F^d}(\{y\})$

Por otra parte, si D es finito, sea B un conjunto infinito numerable contenido en $\mathbb{R} - D$, definamos $E = D \cup B$ y denotemos por $y_1, y_2, \ldots$ a los elementos de E. Obviamente se tiene:

$$\mu_{F^d}((a, b]) = \sum_{\{y\in E: a<y\leq b\}} \mu_{F^d}(\{y\})$$

Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, definamos:

$$\mu(A) = \sum_{\{y\in A\cap E\}} \mu_{F^d}(\{y\})$$

Por el Corolario 6, μ es una medida definida sobre la σ-álgebra formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Además, por el teorema de Clases Monótonas, μ y μ_{F^d} coinciden sobre la σ-álgebra de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$.

Resumiendo, si $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función no decreciente, no constante, continua por la derecha y que crece únicamente mediante saltos, entonces existe un conjunto finito o infinito numerable E tal que $\mu_F(\{y\}) > 0$ para cualquier $y \in E$ y, si B es un subconjunto boreliano de $\mathbb{R}$, entonces:

$$\mu_F(B) = \sum_{\{y \in B \cap E\}} \mu_F(\{y\})$$

En este caso, μ_F puede extenderse a una medida definida sobre la σ-álgebra formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Como podemos ver, la medida μ_F se concentra en los elementos de E; en otras palabras, $\mu_F(E^c) = 0$.

Una medida μ de este tipo, para la cual existe un conjunto de números reales, finito o infinito numerable, E tal que $\mu_F(\{y\}) > 0$ para cualquier $y \in E$ y $\mu(E^c) = 0$ es llamada medida discreta. Esto no implica que los elementos de E estén separados topológicamente en $\mathbb{R}$; es decir, no necesariamente ocurre que para cada $y \in E$ existe un intervalo abierto que contiene a y y que no contiene a ningún otro elemento de E. Incluso el conjunto E puede ser denso en $\mathbb{R}$; por ejemplo, sea $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ el conjunto formado por todos los números racionales y, para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, definamos:

$$\mu(A) = \sum_{\{n \in \mathbb{N}: r_n \in A\}} \frac{1}{2^n}$$

Entonces μ es una medida discreta concentrada en $\mathbb{Q}$. Una función no decreciente y continua por la derecha $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que genera tal medida está dada por:

$$F(x) = \sum_{\{n \in \mathbb{N}: r_n \leq x\}} \frac{1}{2^n}$$

Esta función F crece únicamente mediante saltos y $\mathbb{Q}$ es el conjunto de puntos donde es discontinua.

Medidas y funciones no decrecientes continuas

Consideremos ahora una función $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, no decreciente, no constante y que no tiene discontinuidades.

En este caso, la medida μ_F de cualquier intervalo acotado, con extremos a y b, es igual a $F(b) - F(a)$ y $\mu_F(\{x\}) = 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Además, como F es no constante, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $F(b) - F(a) > 0$.

Por ser F continua, este caso parece más simple que el anterior, donde F es una función que crece únicamente mediante saltos. Sin embargo, en realidad el caso en que F es continua, en general, es más complicado. Esto se puede analizar desde diferentes puntos de vista; por ejemplo, las funciones continuas no siempre son tan "bonitasçomo uno las imagina. Las que uno dibuja habitualmente son funciones que no únicamente son continuas, sino que además son derivables en casi todo punto. Pero sabemos que hay funciones continuas $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ que no son derivables en ningún punto $x \in [0,1]$; de hecho, en un sentido, existen muchas más funciones de este tipo que las que son derivables en algún punto (cf. Bachman G. & Narici L., Functional Analysis, Sección 6.3, Ed. Academic Press, 1966).

El problema de determinar las propiedades que debe tener una función F, no decreciente y continua, para que la medida μ_F que genera sea más fácil de trabajar lo trató Lebesgue en su libro de 1904. Ahí no estudió únicamente el problema de la integración de funciones, sino también el de la búsqueda de primitivas de una función (i.e. dada una función f, encontrar una función cuya derivada sea f), el cual abordó introduciendo el concepto de integral indefinida: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función medible e integrable, la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida mediante la relación $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy + K$, donde K es una constante, es llamada una integral indefinida de f. Demostró entonces que si F es una integral indefinida de f, entonces F es continua, de variación acotada y $F'(x) = f(x)$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero. Probó además que existen funciones continuas y no decrecientes que no son integrales indefinidas de ninguna otra función (ver la introducción al capítulo 5). Poco tiempo después, Vitali y el mismo Lebesgue demostraron que el concepto de integral indefinida coincide con el de función absolutamente continua: Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier colección finita de intervalos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, contenidos en $[a,b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ (cf. Royden, H.L., Real Analysis, second edition, cap. 5, sección 4, Ed. Macmillan, 1968). Estas ideas y resultados condujeron a uno de los teoremas más importantes de la teoría de integración de Lebesgue, el de Radon-Nikodym.

Resumiento, si $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función no decreciente, no constante y continua, diremos que F es absolutamente continua, con respecto a la medida de Lebesgue, si existe una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, no negativa e integrable tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f d\lambda$$

La medida μ_F que genera una tal función está dada por:

$$\mu_F(B) = \int_B f d\lambda$$

para cualquier subconjunto boreliano B de $\mathbb{R}$.

Una medida de este tipo no puede extenderse a una medida definida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Una función no decreciente, no constante y continua $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que no sea absolutamente continua, es llamada singular. Las medidas generadas por las funciones singulares son las más dificiles de tratar.